Flexion plane simple

P9-12 – Chapitre 6

I. Définition

$$\{\mathcal{T}_{coh}\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & m_{f_z} \end{Bmatrix}}_{\text{Flexion pure}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & m_{f_z} \end{Bmatrix}}_{\text{Flexion plane}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & m_{f_z} \end{Bmatrix}}_{\text{Flexion plane simple}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & m_{f_y} \\ T_z & m_{f_z} \end{Bmatrix}}_{\text{Flexion dérivée}}$$

II. Déformations (flexion plane simple suivant l'axe y)

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l} = \underbrace{\lambda}_{>0} y}$$

$$\begin{cases} y < 0 & \Rightarrow \text{ zone de traction} \\ y = 0 & \Rightarrow \text{ pas de variation de longueur la ligne moyenne } (\Delta l = 0) \\ y > 0 & \Rightarrow \text{ zone de compression} \end{cases}$$

III. Contraintes (flexion plane simple suivant l'axe y)

$$\sigma = ay \qquad d\vec{f_x} = \sigma dS \vec{x} \qquad dm_{f_z} = \|\overrightarrow{GM} \wedge d\vec{f_x}\| = -ay^2 dS$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{m_{f_z}}{I_{Gz}} y} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \quad \left(\text{Si déformation selon z : } \sigma = \frac{m_{f_y}}{I_{Gy}} z\right)$$

IV. Principe de superposition

$$\boxed{\sigma = -\frac{m_{f_z}}{I_{Gz}} y + \frac{m_{f_y}}{I_{Gy}} z + \frac{N}{S}}$$

V. Conditions aux limites

- Encastrement : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
- Appuis simples : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$

VI. Etude de la déformée

1. Flexion plane simple

$$\boxed{\begin{cases} EI_{Gz} y'' = m_{f_z} \\ EI_{Gy} z'' = m_{f_y} \end{cases}}$$

2. Flexion plane dérivée

$$\begin{cases} EI_{Gz} y'' + EI_{Gyz} z'' = m_{f_z} \\ EI_{Gy} z'' + EI_{Gyz} y'' = m_{f_y} \end{cases}$$

VII. Moments quadratiques

1. Formules

$$\boxed{I_G = \int_S \rho^2 \, dS}$$
moment quadratique polaire (mm^4)

$$\boxed{I_{Gy} = \int_S z^2 \, dS}$$
moment quadratique autour de l'axe $(G,\vec{y})$

$$\boxed{I_{Gz} = \int_S y^2 \, dS}$$
moment quadratique autour de l'axe $(G,\vec{z})$

$$\boxed{I_{Gyz} = \int_S yz \, dS}$$
moment quadratique autour de l'axe $(G,\vec{z})$

$$\boxed{I_G = I_{Gy} + I_{Gz}}$$

2. Théorème de Huygens

$$\boxed{\begin{aligned} I_0 &= (y_G^2 + z_G^2) S + I_G \\ I_{0y} &= z_G^2 \, S + I_{Gy} \\ I_{0z} &= y_G^2 \, S + I_{Gz} \end{aligned}}$$

3. Valeurs importantes

Circulaire	$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_G}{2}$
Circulaire creuse	$\boxed{I_G = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}}$	$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_G}{2}$
Rectangulaire	$I_G = \frac{hb(b^2 + h^2)}{12}$	$\boxed{I_{Gy} = \frac{h^3 b}{12}}$ $\boxed{I_{Gz} = \frac{hb^3}{12}}$
Carré	$\boxed{I_G = \frac{a^4}{6}}$	$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{I_G}{2}$